

## DISEÑO DE FILTROS IIR: DISTRIBUCIÓN DE LOS POLOS SOBRE DETERMINADAS CURVAS EN EL PLANO S

Leza Morais Lutonda<sup>1</sup>, Karel Toledo de la Garza<sup>2</sup>, Yuneisy Bengochea Arias<sup>3</sup>

<sup>1,2</sup>CUJAE, Dpto. de Telecomunicaciones y Telemática, Calle 114 e/Rotonda y Ciclovía, Boyeros,

<sup>3</sup>Centro de Control Aéreo, Empresa Cubana de Aeropuertos y Servicios Aeronáuticos (ECASA)

<sup>1</sup>e-mail: leza.ml@fecrd.cujae.edu.cu

<sup>2</sup>e-mail: karel.tdlg@gmail.com

### RESUMEN

En varias aplicaciones como en la demodulación de señales digitales se hace necesario el empleo de filtros que respondan rápido en el tiempo, es decir, que tengan un mínimo tiempo de subida de la respuesta al paso unitario. En este trabajo se presentan tres técnicas de diseño de filtros IIR: con los polos distribuidos sobre una parábola, sobre una curva catenaria y en una elipse. Como resultado se obtienen filtros que presentan un menor tiempo de subida y bajo *overshoot*, comparado con los filtros IIR tradicionales. Los métodos son implementados en Matlab y en C, y además se emplea una interfaz gráfica de usuario desarrollada en Matlab para visualizar y comparar los resultados obtenidos. Finalmente, estos métodos son aplicados en el Detector de Envolverte para demodular señales BFSK permitiendo procesar una mayor cantidad de bits de información libre de errores.

**PALABRAS CLAVES:** Filtros IIR, Tiempo de subida, Detector de Envolverte, Matlab.

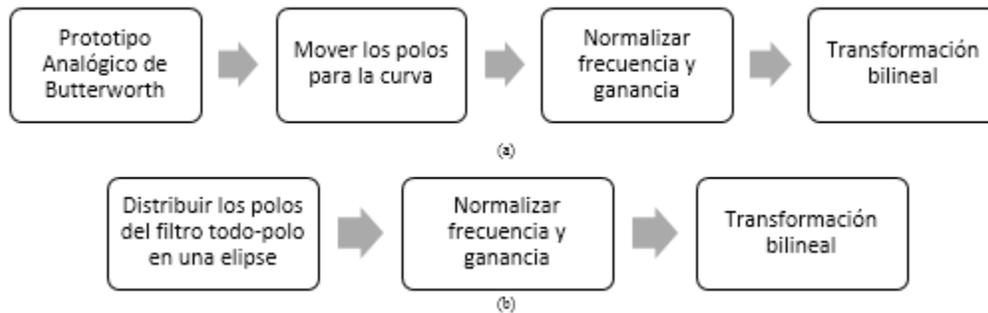
### ABSTRACT

In many applications such as the demodulation of digital signals, it is necessary to use filters with fast response in the time domain, that is, to have a lower risetime of the unit step response. In this paper three approaches to design IIR filters are presented: with poles distributed over a parabola, over a catenary, and over an ellipse. In this case, filters with a small risetime and a low overshoot are obtained in comparison with the traditional IIR systems. The methods are implemented in Matlab and C, and a graphical interface in Matlab is developed in order to compare the results. Finally, these methods are applied to the Envelope Detector in order to demodulate BFSK signals. This allows to process a large amount of bits free of errors.

**KEYWORDS:** IIR filters, Risetime, Envelope Detector, Matlab.



directamente en una elipse. En la fase final de los tres métodos se aplica la transformación bilineal para obtener el filtro digital diseñado. En la figura 2 se representa un diagrama en bloques del proceso de diseño.

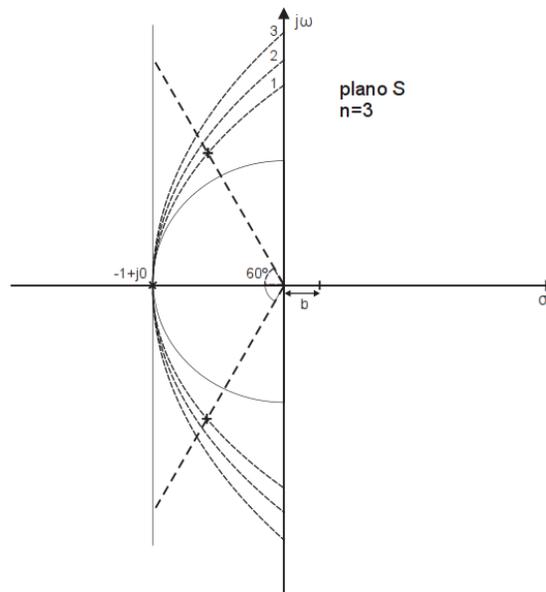


**Figura 2: Diagrama en bloques del proceso de diseño del filtro digital. a) Para la distribución de los polos en una parábola y en una catenaria; b) para el filtro todo-polo con polos distribuidos en una elipse.**

### 1. DISTRIBUCIÓN DE LOS POLOS SOBRE DETERMINADAS CURVAS

#### Distribución de polos en una parábola

Este método, propuesto originalmente por Mullick [5] y posteriormente rectificado por Shenoi [6] para posibilitar su comparación con otros sistemas, consiste en desplazar los polos del prototipo analógico del filtro de Butterworth para una parábola con vértice en  $-1 + j0$  del plano  $S$  como se muestra en la figura 3.



**Figura 3: Distribución de los polos en una parábola.**

Sea

$$H(s) = \frac{K}{D(s)} = \frac{K}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} \quad (1)$$

la función de sistema del filtro analógico de orden  $n$  que se desea diseñar. Si el ángulo  $\theta_k$  es el correspondiente al  $k$ -ésimo polo del filtro de Butterworth, entonces, mover el polo desde la circunferencia hacia la parábola equivale a interceptar la recta

$$\omega_k = \sigma_k \tan(\theta_k) \quad (2)$$

con una parábola, que se representa por

$$4(a + b)(\sigma_k + a) = \omega_k^2 \quad (3)$$

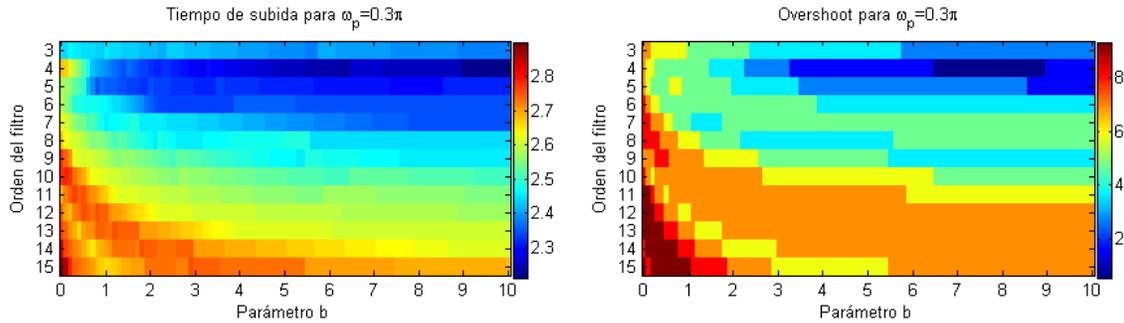
donde  $a$  y  $b$  son números reales, determinando entonces el polo  $p_k = \sigma_k + j\omega_k$  para  $H(s)$ .

Los cambios realizados en los polos traen como consecuencia que el filtro ya no tenga frecuencia normalizada (con frecuencia de corte igual a uno) como el prototipo de Butterworth. Para normalizar la frecuencia se procede como se propone en [6], dividiendo el valor de los polos por la frecuencia de  $3dB$  del filtro modificado, obteniendo como resultado una frecuencia de corte unitaria.

Para concluir, hay que seleccionar el valor de la ganancia  $K$  de (1) que garantice que  $|H(0)| = 1$ , ya que se trata de un filtro pasa-bajo. Teniendo en cuenta que el valor de  $K$  no afectará al tiempo de subida ni al *overshoot*, se obtiene

$$K = |D(0)| \quad (4)$$

En función del orden del filtro, se deberá seleccionar un valor del parámetro  $b$  de la ecuación (3) que presente el menor valor del tiempo de subida. En la figura 4 se presentan mapas del tiempo de subida y del *overshoot* para diferentes órdenes y para valores diferentes de  $b$  de un filtro pasa-bajo con frecuencia de corte en  $\omega_p = 0.3\pi$  y se observa que es posible diseñar filtros con valores de tiempo de subida menores que  $2.6$  *muestras* para los filtros de orden mayor que 10, mientras que para órdenes inferiores a 10 se puede llegar a resultados inferiores a  $2.4$  *muestras*. Además, el porcentaje de *overshoot* generalmente no sobrepasa el 6.



**Figura 4:** Filtro pasa-bajo de  $\omega_p = 0.3\pi$  diseñado con distribución parabólica de los polos. Resultados para diferentes órdenes y diferentes valores de  $b$ . a) Tiempo de subida, b) *overshoot*.

### Distribución de polos en una catenaria

Siguiendo la misma idea del apartado anterior, los polos del prototipo analógico de Butterworth serán desplazados hacia una curva catenaria [7], como se observa en la figura 5. Siendo así, se interceptará la recta (2) con la curva catenaria que se representa como

$$\sigma_k = a(\cosh\omega_k - b) \quad (5)$$

donde  $a$  y  $b$  son números reales y deben cumplir la relación

$$a = \frac{1}{b-1} \quad (6)$$

para que la curva tenga su vértice en el punto  $-1 + j0$  del plano complejo  $S$ .

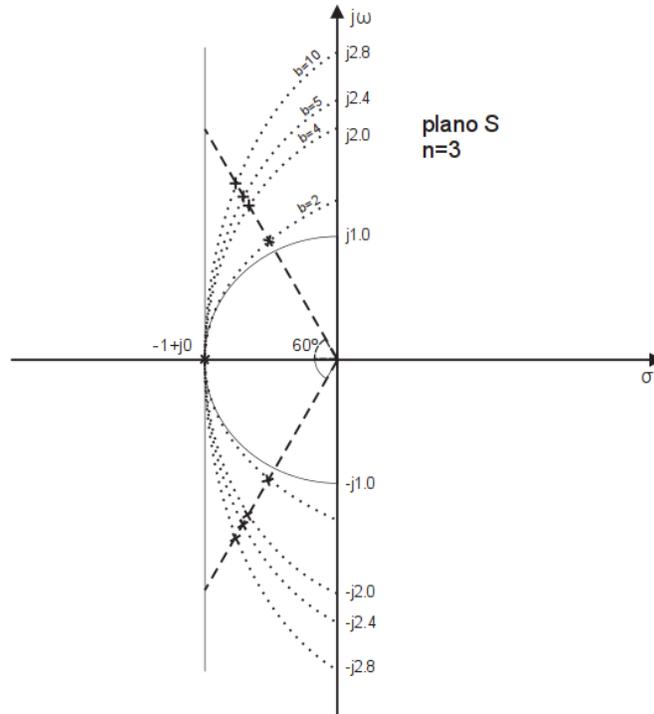


Figura 5: Distribución de polos en una catenaria

Finalmente, como en el caso de la parábola, se normaliza la frecuencia de  $3dB$  a  $1 rad/s$ , y se obtiene el valor de la ganancia  $K$  a través de la expresión (4).

Los resultados del tiempo de subida y del *overshoot* dependerán entonces del parámetro  $b$ , del orden del filtro y de la frecuencia de corte. En la figura 6 se presentan resultados del tiempo de subida y del *overshoot* para varios órdenes y diferentes valores de  $b$  para un filtro pasa-bajo con frecuencia de corte en  $\omega_p = 0.3\pi$ . Se observa que para filtros de órdenes impares el valor del tiempo de subida no pasa de  $2.0$  *muestras* y el *overshoot* es inferior a  $5\%$ , mientras que para órdenes pares generalmente se obtiene tiempo de subida menores que  $2.5$  *muestras* y valores de *overshoot* menores que  $6\%$ .

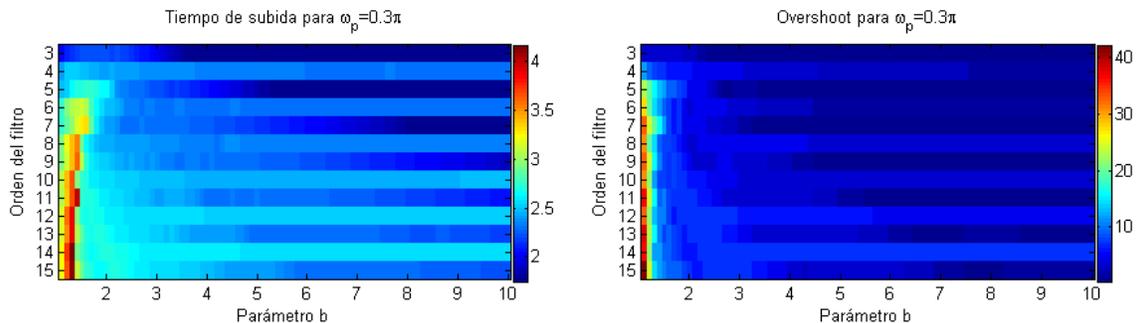


Figura 6: Filtro pasa-bajo de  $\omega_p = 0.3\pi$  diseñado con distribución de los polos en una catenaria. Resultados para diferentes órdenes y diferentes valores de  $b$ . a) Tiempo de subida, b) *overshoot*.

### Distribución de polos en una elipse

En este método se distribuyen los polos en una elipse con valores de  $\omega_k$  separados uniformemente en el eje imaginario del plano  $S$  [8]. La figura 7 ilustra un ejemplo para un filtro de orden 5.

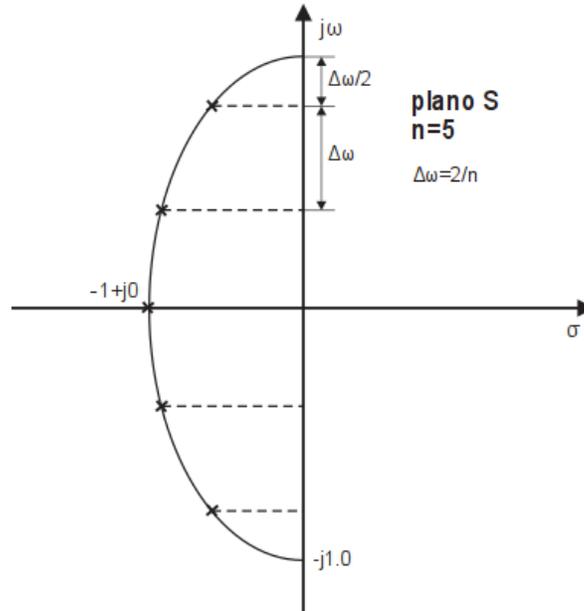


Figura 7: Distribución de polos en una elipse

Los valores  $\omega_k$  separados en iguales intervalos en el eje imaginario, se calculan, según el orden del filtro  $n$ , de la siguiente forma:

$$\omega_k = \pm \begin{cases} \frac{2k-1}{n} & k = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{2(k-1)}{n} & k = 1, 2, \dots, \frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \quad (7)$$

Una vez conocida la parte imaginaria  $\omega_k$  del polo, la parte real se calcula con la ecuación de la elipse:

$$\sigma_k^2 = a^2(1 - \omega_k^2) \quad (8)$$

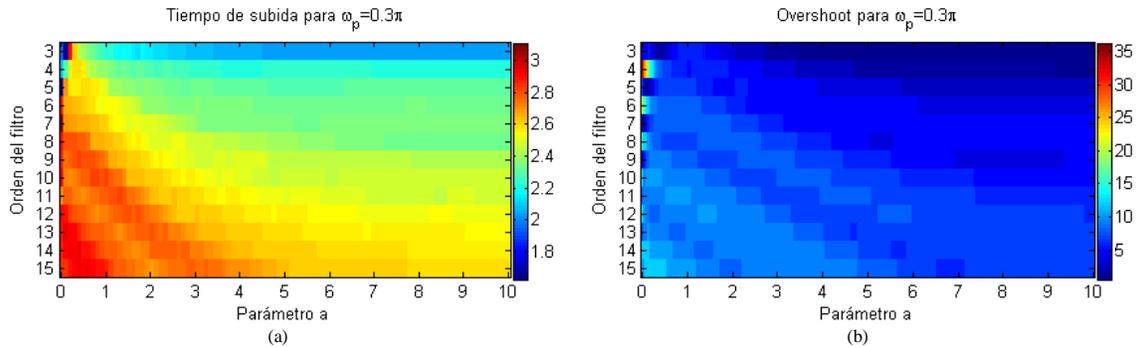
donde  $2a$  es el diámetro en el eje  $\sigma$ .

Para que el sistema sea estable, se considera solamente la raíz negativa de (8). Entonces el valor de  $\sigma_k$  será

$$\sigma_k = -a\sqrt{(1 - \omega_k^2)} \quad (9)$$

Igual que en los métodos anteriores, es necesario normalizar la frecuencia y la ganancia.

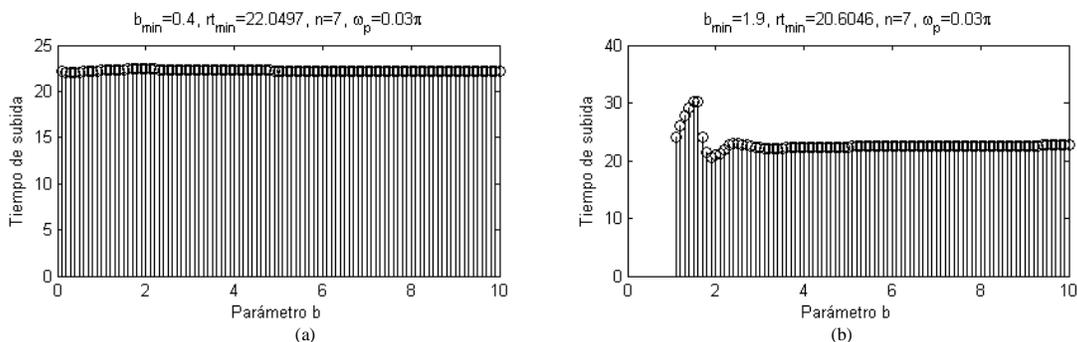
En la figura 8 se presentan los resultados del tiempo de subida y del *overshoot* para varios órdenes y diferentes valores de  $a$  para un filtro pasa-bajo con frecuencia de corte en  $\omega_p = 0.3\pi$  y se puede constatar que los valores máximo de tiempo de subida para los diferentes órdenes se encuentran entre 1.67 y 2.6 *muestras*, mientras que los valores del *overshoot* son inferiores a 6%.

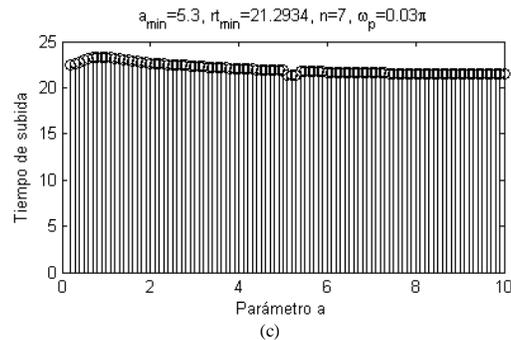


**Figura 8: Filtro pasa-bajo de  $\omega_p = 0.3\pi$  diseñado con distribución elíptica de polos. Resultado para diferentes órdenes y diferentes valores de  $a$ . a) Tiempo de subida, b) *overshoot*.**

### 1. RESULTADOS

Se ha demostrado que no existen expresiones analíticas que relacionen el orden del filtro, la frecuencia de corte y los parámetros del método con el tiempo de subida o el *overshoot*, por lo que se desarrolla una función en Matlab que permite determinar el valor del parámetro correspondiente al menor valor del tiempo de subida de los filtros. Con ello es posible construir mapas como los de las figuras 4, 6 y 8, pudiendo determinarse el valor conveniente del parámetro  $a$  utilizar. En la figura 9 se presentan las gráficas para el caso de  $n = 7$  y  $\omega_p = 0.03\pi$  para los tres diferentes métodos. De esta forma, se obtienen valores de tiempo de subida de 22.0497, 20.6046 y 21.2934 *muestras* respectivamente para las distribuciones de polos en una parábola, en una catenaria y en una elipse. Con el filtro de Butterworth del mismo orden se obtiene un tiempo de subida de 29.2248 *muestras*.



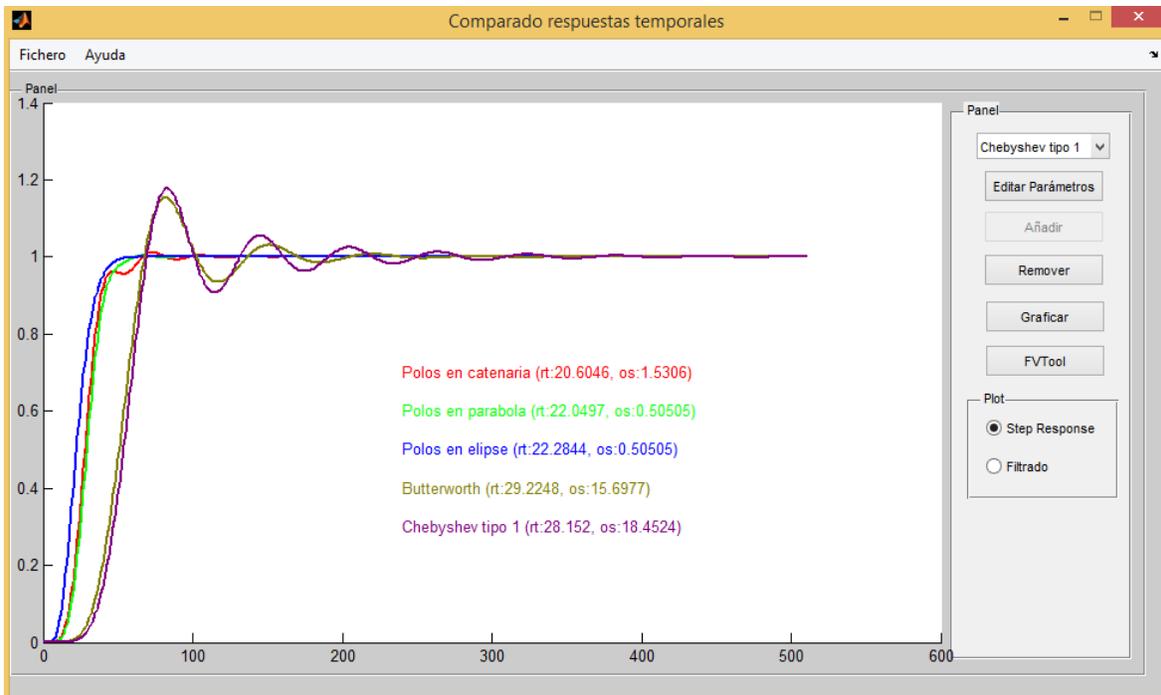


**Figura 9: Valores del tiempo de subida para un filtro pasa-bajo de orden  $n = 7$  y  $\omega_p = 0.03\pi$ . Tiempo de subida mínimo y el del parámetro correspondiente. a) Distribución parabólica; b) distribución en catenaria; c) distribución elíptica.**

Los valores del *overshoot* para el ejemplo anterior son 0.5% para la distribución parabólica y 1.53% para la distribución en la catenaria y en la elipse, contra el *overshoot* de 15.69% del Butterworth.

#### Interfaz gráfica de usuario en Matlab

Para comparar los resultados, fue desarrollada una interfaz gráfica de usuario en Matlab, como se muestra en la figura 10. Esta aplicación permite visualizar las respuestas al paso unitario de los diferentes filtros y analizar los valores del tiempo de subida y del *overshoot* correspondientes. A partir de un fichero M-File se configuran los filtros que se van a comparar, y en la interfaz gráfica se pueden cambiar los parámetros de cada filtro. También es posible visualizar las respuestas de frecuencia de los filtros y comparar las envolventes de filtrar pasa-bajo un tono de radiofrecuencia rectificado. En ejemplo de la comparación en la figura 10 se puede observar que se obtienen menores valores del tiempo de subida y *overshoot* con los métodos presentados en comparación con los métodos tradicionales.



**Figura 10: Herramienta para la comparación de la respuesta en el dominio del tiempo de filtros digitales.**

### Aplicación en el Detector de Envolvente

Los filtros diseñados en este trabajo son aplicados en el Detector de Envolvente para demodular señales BFSK. Se observa que con ellos se puede determinar una mayor cantidad de bits de información libre de errores, en comparación con los filtros IIR clásicos. En la figura 11 se representa esa comparación, comprobando que los tres métodos presentan una mejora considerable en la cantidad de bits demodulados sin errores. El filtro con distribución de polos en una parábola es el que presenta mejor resultado, con un total de  $1.15 \cdot 10^{11}$  bits demodulados sin errores, la distribución de polos en catenaria resultó en  $9.46 \cdot 10^{10}$  bits y la de polos en una elipse demodula  $1.19 \cdot 10^{10}$  bits. Con el filtro de Butterworth y el filtro elíptico se alcanza solamente  $2.09 \cdot 10^7$  y  $6.17 \cdot 10^5$  bits, respectivamente. En todos los casos, para el filtrado pasa-banda del detector se utilizó el filtro de Kaiser.

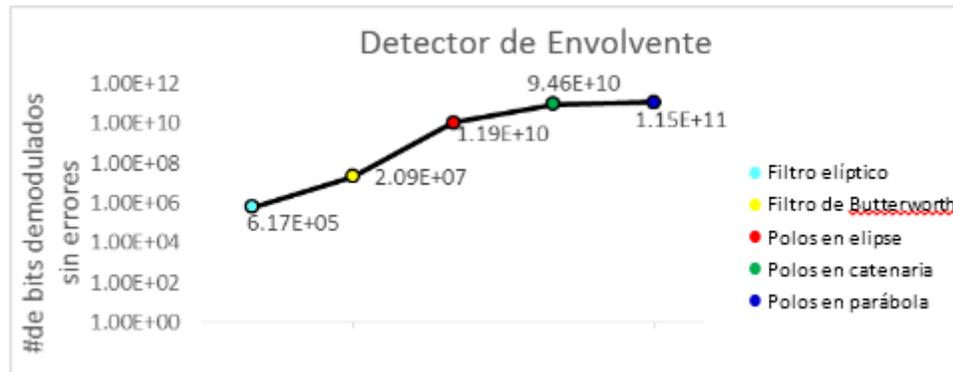


Figura 11: Resultado de la aplicación de los diferentes filtros como filtro pasa-bajo de un detector de envolvente.

## CONCLUSIONES.

Se han implementado filtros IIR todo-polo distribuyendo los polos en diferentes curvas y se ha logrado disminuir el tiempo de subida y el *overshoot*. Fueron presentados mapas que permiten seleccionar el valor conveniente del parámetro para optimizar el tiempo de subida del filtro correspondiente. La herramienta de interfaz gráfica de usuario desarrollada en Matlab ha permitido visualizar y comparar los resultados obtenidos, así como agregar cualquier otro método implementado en trabajos futuros. Los filtros diseñados fueron aplicados en un Detector de Envolvente para demodular señales BFSK permitiendo procesar una mayor cantidad de bits de información sin cometer errores. Con los diferentes ejemplos demostrados se puede concluir que en dependencia de las especificaciones se pueden lograr menores valores del tiempo de subida con cualquier de los métodos presentados en comparación con los métodos tradicionales.

## REFERENCIAS.

1. OPPENHEIM, A; SCHAFER, R. W. *Discrete-Time Signal Processing*. Upper Saddle River: Pearson, 2010.
2. XIONG, F. "Clock Recovery". En *Digital Modulation Techniques*, 2da ed., Artech House, 2000, pp. 196-198.
3. CARLSON, A. B.; CRILLY, P. B.; RUTLEDGE, J. C. *Communication systems, an introduction to signals and noise in electrical communication*. New York: McGraw-Hill, 2002, pp. 116-120.
4. OGATA, K. *Discrete-time control systems*. Prentice-Hall, 1987.

5. MULICK, S. K. "Pulse Networks with Parabolic Distribution of Poles". *IRE Transactions on Circuit Theory*, 1961, vol CT-9, pp. 302-305.
6. SHENOI, B. A. "Pulse Networks with Parabolic Distribution of Poles and Butterworth Networks Compared". *IEEE Transactions on Circuit Theory*, 1964, p. 287.
7. GHANSI, M. S; ADAMOWICZ, M. "A New Class of Filters for Pulse Applications". *Journal of the Franklin Institute*, 1966, vol. 282, pp. 20-30.
8. SCANLAN, J. O. "Transfer Functions with Elliptic Distribution of Poles at Equal Frequency Spacings". *IEEE Transactions on Circuit Theory*, 1965, pp. 260-266.