

Eigenfilter: método de diseño de filtros FIR con restricciones temporales.

Roberto J. Talabera Diéguez¹ Karel Toledo de la Garza²

¹Dpto. de Telecomunicaciones y Telemática, Cujae, La Habana, Cuba

¹e-mail:roberto.td@fecrd.cujae.edu.cu ²email: karel@udio.cujae.edu.cu

RESUMEN

Con el objetivo de minimizar los errores en la demodulación de señales digitales como PSK o FSK, se hace necesario emplear filtros cuya respuesta al paso unitario tenga un tiempo de subida lo más pequeño posible. En este artículo se incorpora al diseño de filtros digitales la técnica de eigenfilter para el diseño de filtros de respuesta finita al impulso (FIR) y de filtros FIR interpolados (IFIR). Esta técnica brinda la posibilidad de incorporar restricciones en el dominio de la frecuencia y el tiempo simultáneamente, lo cual posibilita la disminución del tiempo de subida de los filtros diseñados. Con el objetivo de validar los resultados obtenidos se implementó una interfaz gráfica de usuario en Matlab. Además, se ilustra un ejemplo de aplicación en un detector de envolvente para demodular señales BFSK que evidencia la posibilidad de procesar secuencias de símbolos de mayor longitud sin introducir errores en la demodulación.

PALABRAS CLAVES: Eigenfilter, FIR, Tiempo de Subida, Matlab.

ABSTRACT

In order to minimize errors in the demodulation of digital signals such as PSK or FSK, it is necessary the use of filters with a small rise time regarding the unit step response. This article incorporates the eigenfilter technique for digital filter design of finite impulse response (FIR) filters and interpolated FIR filters (IFIR). With these techniques, it is possible to incorporate restrictions on both, frequency and time domain, in order to decrease the rise time parameter. A graphical user interface in Matlab was implemented for validation purpose. In addition, an example for BFSK demodulation is illustrated through the use of the envelope detector which demonstrates the possibility to process larger sequences of symbols without introduce errors in the demodulation process.

KEYWORDS: Eigenfilter, FIR, Rise Time, Matlab.

En este artículo se emplea la técnica de *eigenfilter* para diseñar filtros digitales FIR con restricciones temporales, los cuales serán incorporados a un detector de envolvente [6] para demodular señales BFSK. Una de las desventajas que tiene este detector, es que cuando las frecuencias son muy cercanas el orden de los filtros que se necesitan diseñar es elevado. Esto conlleva a la ejecución de un gran volumen de cálculo y por lo tanto incrementa el costo computacional. Los filtros FIR interpolados (IFIR) [7] pueden ser utilizados con el objetivo de eliminar esta deficiencia ya que proporcionan un diseño con una cantidad menor de sumadores y multiplicadores por lo que el costo computacional se reduce. Para realizar el diseño de estos filtros se hace uso de la técnica de *eigenfilter*, cuya combinación con los filtros IFIR fue propuesta por Chen y Vaidyanathan [8], dando como resultado un método para el diseño de filtros digitales interpolados muy sencillo y versátil.

Diseño de filtros FIR con fase lineal.

Los filtros FIR son ampliamente utilizados en los sistemas de comunicaciones digitales debido a su estabilidad y a la característica de que su fase es lineal. Considerando, para mayor simplicidad, que se desea diseñar un filtro FIR con fase lineal de tipo I y orden par, se necesita aproximar su función transferencial $H(z)$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h_n z^{-n} \quad (1)$$

con una respuesta ideal $D(\omega)$

$$D(\omega) = \begin{cases} 1 & 0 \leq \omega \leq \omega_p \\ 0 & \omega_p \leq \omega \leq \pi \\ \text{no importa} & \omega_p < \omega < \omega_s \end{cases} \quad (2)$$

Puesto que el filtro FIR tiene fase lineal y el orden, $N-1$, es par se puede plantear que $h_n = h_{N-1-n}$ de donde se deriva la función transferencial se puede expresar como:

$$H_0(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h_n e^{-j(n-M)\omega} = \sum_{n=0}^M b_n \cos n\omega \quad (3)$$

donde $M = (N - 1)/2$

$$b_n = \begin{cases} 2h_{(\frac{N-1}{2}-n)}, & n \neq 0 \\ h_{(\frac{N-1}{2})}, & n = 0 \end{cases} \quad (4)$$

La amplitud de la respuesta de frecuencia $H_0(e^{j\omega})$ puede expresarse de forma matricial como:

$$H_0(e^{j\omega}) = b^t c \quad (5)$$

donde:

$$b = \begin{cases} [b_0 \ b_1 \ \dots \ b_{M-1} \ b_M]^t, & N - 1 \text{ par} \\ [b_0 \ b_1 \ \dots \ b_{M-2} \ b_{M-1}]^t, & N - 1 \text{ impar} \end{cases} \quad (6)$$

Y

$$c = \begin{cases} [1 \ \cos \omega \ \cos 2\omega \ \dots \ \cos M\omega]^t, & N - 1 \text{ par} \\ [\cos \frac{\omega}{2} \ \cos \frac{3\omega}{2} \ \dots \ \cos (M - \frac{1}{2})\omega]^t, & N - 1 \text{ impar} \end{cases} \quad (7)$$

DISEÑO CON EIGENFILTER

La técnica de *eigenfilter* propuesta por Vaidyanathan y Nguyen [4] parte de representar el problema de diseño de la forma:

$$E = b^t P b \quad (8)$$

donde E es el error de aproximación que debe ser minimizado, P es una matriz real, simétrica y definida positiva [5] y b es un vector que está relacionado con h mediante (4). La solución se obtiene entonces aplicando el principio de Rayleigh [9]. El vector b que minimiza el error de aproximación E , es el vector propio correspondiente al menor valor propio de la matriz P .

El problema de diseño se plantea como una aproximación de los mínimos cuadrados, la cual se expresa como:

$$E_{LS} = \frac{1}{\pi} \int_S |D(\omega) - H_0(\omega)|^2 d\omega \quad (9)$$

La forma clásica de resolver un problema planteado con esta aproximación incluye la inversión de matrices, lo que conlleva un gran costo computacional. Por lo tanto se transforma este problema a la forma (8) para luego aplicar el principio de Rayleigh. Primeramente se parte de expresar el error de aproximación para cada banda de diseño por separado. Para la banda de atenuación el error de aproximación se expresa de la siguiente forma:

$$E_a = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_s}^{\pi} |D(\omega) - H_0(\omega)|^2 d\omega \quad (10)$$

Luego de expresar la respuesta de frecuencia del filtro dada por (2), en forma matricial [4] y sustituir en la ecuación (10), el error de aproximación se reduce a

$$E_a = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_s}^{\pi} b^t c c^t b d\omega = b^t P_a b \quad (11)$$

donde :

$$P_a = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_s}^{\pi} c c^t d\omega \quad (12)$$

Para la banda de paso no se puede hacer el mismo análisis, pues no es posible expresar el error de la forma (8). Por conveniencia se aproxima la respuesta de frecuencia del filtro $H_0(\omega)$ con su valor a la frecuencia de referencia $\omega = 0$, cuyo valor es $H_0(0) = 1^t b$. De esta forma, sustituyendo en (9), el error de aproximación en la banda de paso estaría expresado por:

$$E_p = \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_p} b^t (1-c)(1-c)^t b d\omega = b^t P_p b \quad (53)$$

donde :

$$P_p = \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_p} (1-c)(1-c)^t d\omega \quad (64)$$

Luego de obtener el error de aproximación en la banda de paso y en la banda de atenuación de la forma (8) el error de aproximación total está determinado por la suma de los errores en cada banda, como se muestra en la ecuación:

$$E = (1-\alpha)E_p + \alpha E_a = b^t P b \quad (75)$$

donde :

$$P = (1-\alpha)P_p + \alpha P_a \quad (86)$$

es una matriz real, simétrica y definida positiva y α es una ponderación cuyo valor tiene que ser menor que la unidad. Mediante su variación podemos controlar las atenuaciones en las bandas, esto es, aumentando el valor de α se obtiene una mayor atenuación en la banda de atenuación, pero a la vez empeora el diseño en la banda de paso. En el caso contrario, disminuyendo α obtenemos un mejor diseño en la banda de paso pero también disminuye la atenuación en la banda de atenuación. Una vez expresado el error de aproximación de la forma (15) el vector b que minimiza dicho error es el vector propio correspondiente al menor valor propio de la matriz P , el cual está relacionado con los coeficientes del filtro h_n mediante (4). De esta forma, la complejidad del algoritmo se concentra en el cálculo de la matriz P , al tener que resolver las integrales mediante un método numérico. Aun así, el costo computacional es menor que el del algoritmo inicialmente utilizado para resolver la aproximación de mínimos cuadrados mediante la inversión de matrices.

Inclusión de restricciones temporales

Vaidyanathan y Nguyen muestran en [4] cómo incluir restricciones temporales en el diseño usando la técnica de *eigenfilter*. En el caso que ocupa este artículo se necesita que los filtros diseñados tengan un tiempo de subida pequeño. Esto puede lograrse minimizando la energía de la respuesta al paso unitario en la región de las primeras k muestras, justo antes de comenzar la transición.

La respuesta al paso unitario, t_n , está definida como:

$$t_n = \sum_{k=0}^{N-1} h_k u_{n-k} \quad (97)$$

que en forma matricial se expresa como:

$$t = Uh \quad (108)$$

donde

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (119)$$

De esta forma, la energía de la respuesta al paso unitario es $E_t = tt^t$, que se puede escribir como:

$$E_t = h^t U^t U h \quad (20)$$

De (2) se tiene que $h = Db$ donde

$$D = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{para } N-1 \text{ par} \quad \text{y} \quad D = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{para } N-1 \text{ impar} \quad (21)$$

por lo que

$$E_t = b^t D^t U^t U D b = b^t P_t b \quad (12)$$

donde

$$P_t = D^t U^t U D \quad (133)$$

Entonces, el error de aproximación incluyendo las restricciones temporales se expresa como:

$$E = (1 - \alpha - \beta)E_p + \alpha E_a + \beta E_t = b^t P b \quad (144)$$

donde

$$P = (1 - \alpha)P_p + \alpha P_a + \beta P_t \quad (155)$$

y β es un parámetro que permite establecer el grado en que las restricciones temporales se tienen en cuenta en el diseño. Un aumento en el valor de β hará que el diseño se centre más en las restricciones temporales, a costa de un deterioro en la frecuencia.

Diseño de IFIR utilizando *eigenfilter*

El diseño de filtros interpolados [7] se basa en transformar el diseño de un filtro con frecuencias de corte ω_p y ω_s en dos etapas de filtrado, como se muestra en la figura 2.

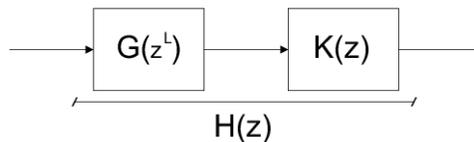


Fig. 2 Función transferencial de un sistema IFIR

La primera etapa $G(z^L)$, está formada por el resultado de incorporar $L-1$ puntos con valor nulo entre cada elemento de la respuesta al impulso de un filtro base cuyas frecuencias de corte son $\omega_p * L$ y $\omega_s * L$, siendo L el factor de interpolación. Esta operación trae como consecuencia que las frecuencias de corte disminuyan en un factor de L , pero a su vez ocasiona la aparición de réplicas en la respuesta de frecuencia, las cuales tienen un periodo de $2\pi/L$. Para eliminar las réplicas se añade el interpolador $K(z)$, el cual es un filtro pasa bajo de pocos coeficientes, típicamente alrededor de 10, con frecuencia de corte a las bajas en ω_p y a las altas en $2\pi/L - \omega_s$. Esto se aprecia en la Fig. 3, quedando en evidencia que el diseño se reduce a calcular los coeficientes de un filtro cuyo orden es L veces menor que el orden del filtro original y del filtro pasabajo que funciona como interpolador cuyo orden es tan bajo que no tiene gran impacto en el costo computacional del diseño.

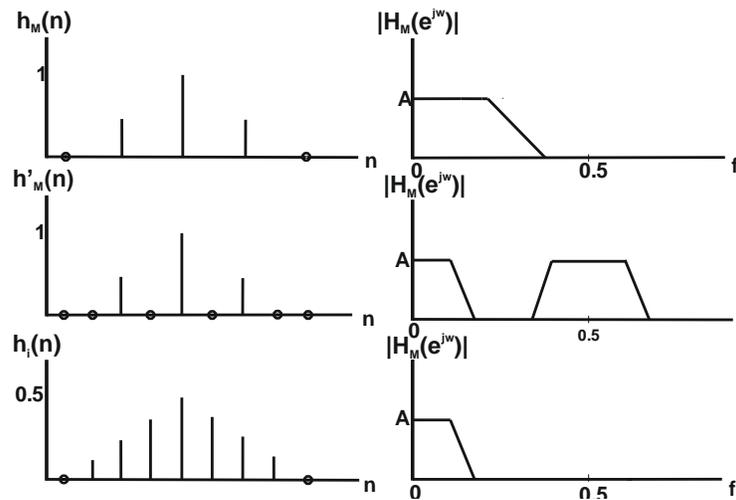


Fig. 3 Representación de las señales en un filtro IFIR pasa bajo con $L = 2$.

Chen y Vaidyanathan [8] propusieron utilizar el método de *eigenfilter* para diseñar este tipo de filtros. En su artículo, los autores plantean el diseño de filtros interpolados de la forma:

$$E = c^t P' c \quad (26)$$

donde c es un vector que está relacionado con los coeficientes del filtro base y la matriz P' que contiene, además de las restricciones del filtro modal, las operaciones correspondientes al diseño de estos filtros; dígase la incorporación de los $L-1$ puntos nulos en la respuesta al impulso del filtro base y el filtrado pasa-bajo para remover las réplicas que se producen. A través del principio de Rayleigh, es posible entonces obtener los coeficientes del filtro IFIR a partir del vector c [7]. Las restricciones temporales pueden ser incorporadas en el diseño de estos filtros de forma similar a como se expuso anteriormente para el caso de filtros FIR. De esta forma, la técnica de *eigenfilter* constituye una alternativa eficiente para el diseño de filtros IFIR, que permite incorporar restricciones en el dominio del tiempo para controlar parámetros como el tiempo de subida, el *overshoot* y el *undershoot*.

RESULTADOS

Los filtros diseñados mediante el método de *eigenfilter* fueron incorporados en una herramienta implementada en Matlab para analizar los resultados obtenidos. Esta herramienta permite visualizar la respuesta al paso unitario de los filtros así como el valor del tiempo de subida y otros parámetros de interés como son el *overshoot* y el *undershoot*. En la Fig. 4 se muestran 5 filtros pasa-bajo con las mismas características frecuenciales. Primeramente se diseñaron filtros pasa-bajos FIR e IFIR mediante *eigenfilter* solo con restricciones en el dominio de la frecuencia y posteriormente se realizaron ambos diseños incorporando restricciones temporales. Mediante el empleo de la herramienta propuesta se pudo constatar que el empleo de la técnica de *eigenfilter* para el diseño de filtros digitales, permite disminuir el tiempo de subida al incorporar restricciones temporales en el diseño. Al comparar estos

diseños con otros filtros obtenidos mediante otros métodos, como la ventana de Kaiser, se obtienen resultados similares, según se muestra en la figura 4.

Los filtros IFIR logran la mayor disminución en el tiempo de subida cuando las frecuencias de corte son cercanas en valor, sin embargo, para filtros de banda ancha los valores del tiempo de subida son similares, e incluso mayores, a los de los filtros que no incorporan restricciones temporales, como se aprecia en la figura 5. Esto comprueba el buen comportamiento de estos filtros cuando las frecuencias de corte son muy cercanas y los convierte en una alternativa más eficiente para el diseño de filtros de banda estrecha.

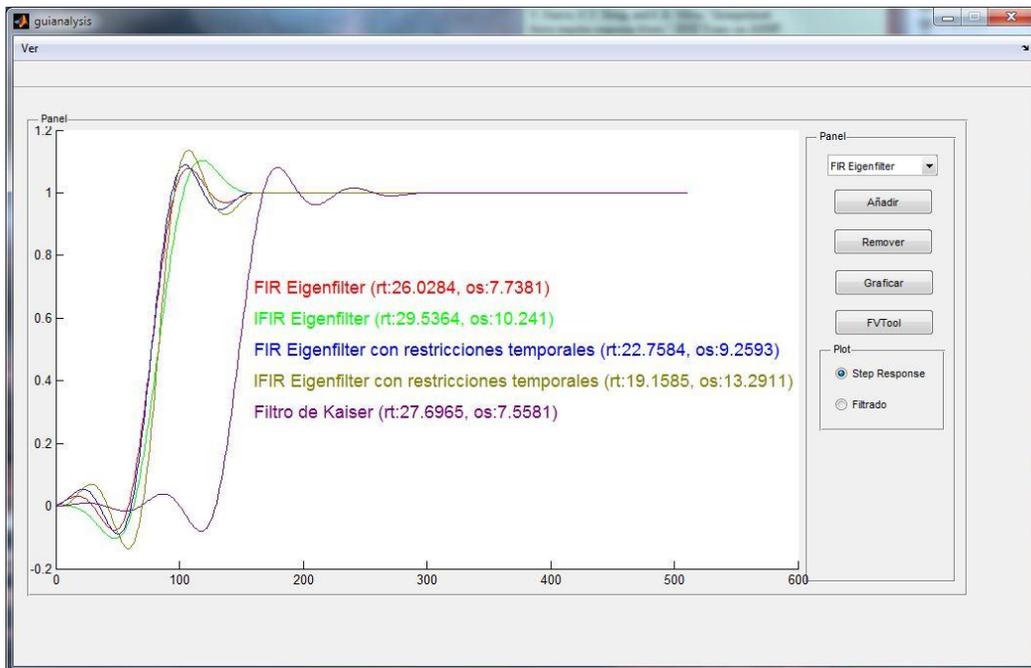


Fig.4 Herramienta para la comparación de los filtros diseñados. Frecuencias $\omega_p = 0.025\pi$ y $\omega_s = 0.04\pi$ rad/s, atenuación en la banda de paso $\delta_p = 0.1$ y en la banda de atenuación $\delta_s = 0.01$ veces.

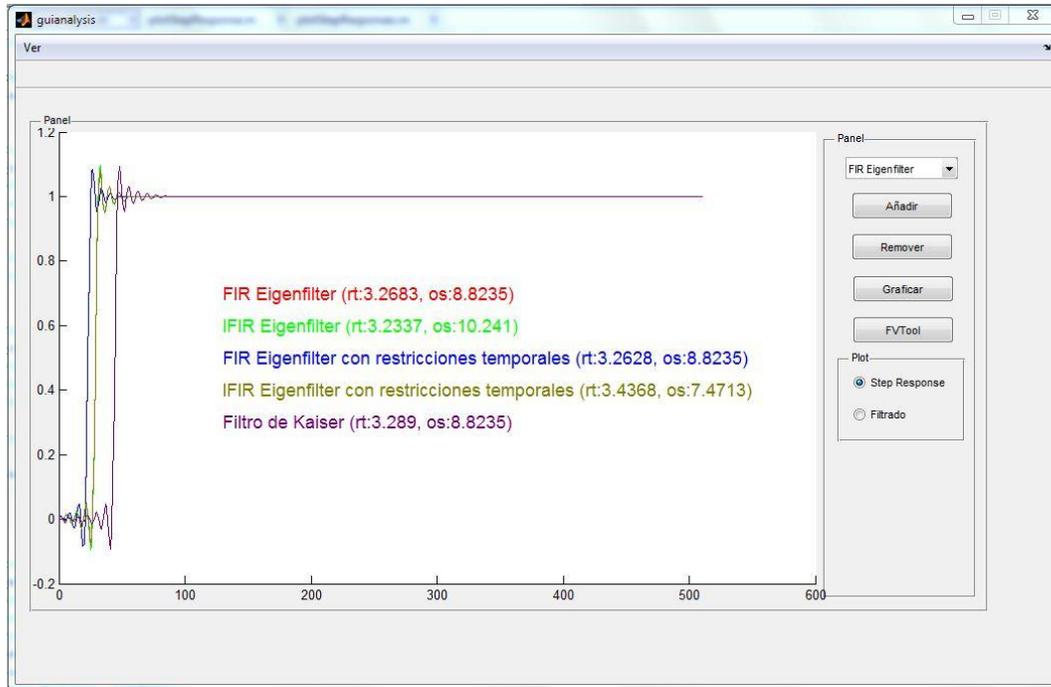


Fig. 5 Herramienta para la comparación de los filtros diseñados. Frecuencias de corte en $\omega_p = 0.25\pi$ y $\omega_s = 0.3\pi$ rad/seg, atenuación en la banda de paso $\delta_p = 0.1$ y en la banda de atenuación $\delta_s = 0.01$ veces.

Por otra parte, los filtros diseñados mediante *eigenfilter* se incorporaron en un detector de envolvente para demodular señales BFSK. En la figura 6 se muestran los resultados obtenidos en cuanto a la cantidad de bits demodulados por el receptor sin errores. Se utilizaron filtros pasa banda FIR, implementados por el método de Kaiser y filtros IIR elípticos. Los filtros pasa bajo se diseñaron mediante el método de *eigenfilter* y mediante la ventana de Kaiser. Estos resultados evidencian que el empleo de los filtros diseñados, utilizando la técnica de *eigenfilter*, mejora la calidad de la demodulación de las señales BFSK demoduladas mediante un detector de envolvente. Como se muestra en la figura 6, se logra un aumento considerable de la cantidad de bits procesados sin introducir ningún bit erróneo, en comparación con los filtros de ventana de Kaiser empleados anteriormente en este detector.

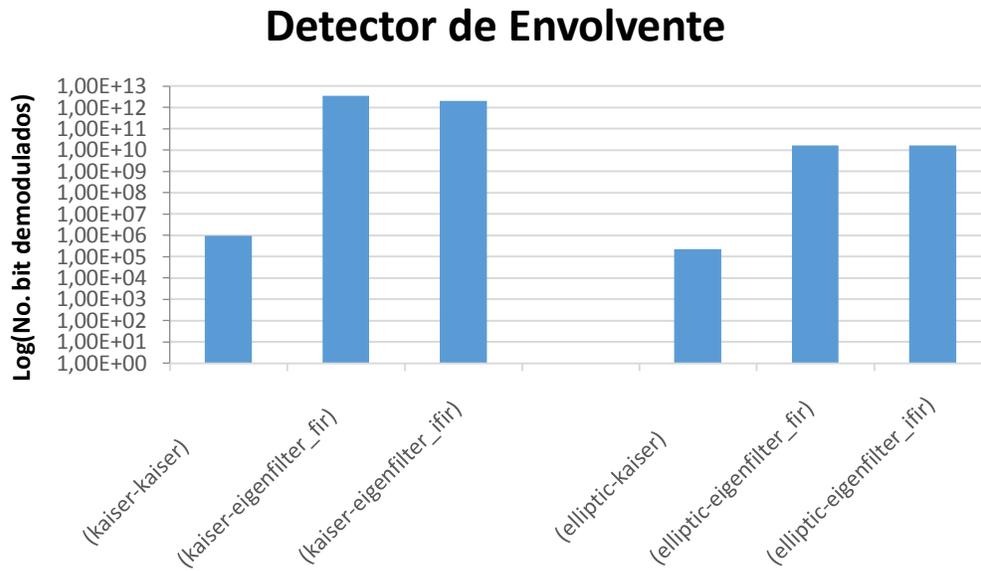


Fig. 6 Calidad del Detector de Envolverte para distintas combinaciones de filtros pasa-banda y pasa-bajo.

CONCLUSIONES.

La implementación de filtros digitales FIR utilizando la técnica de *eigenfilter* disminuye el error medio cuadrático transformando esta restricción en forma matricial para proporcionar una solución que no involucre la inversión de matrices. Este método permite la incorporación de restricciones temporales disminuyendo el tiempo de subida de la respuesta al paso unitario. Además se evidencia cómo el empleo de *eigenfilters* aplicada al diseño de filtros FIR e IFIR reduce en gran medida la complejidad de diseño. Con la incorporación de los filtros diseñados en un detector de envolverte para señales BFSK, aumenta la calidad de la demodulación en comparación con los filtros de Kaiser empleados anteriormente. La utilización de los filtros interpolados en el receptor demostró ser una opción viable cuando las frecuencias están muy cercanas entre sí, puesto que disminuye el costo computacional debido al decremento del orden del filtro a diseñar. Asimismo, la implementación de una interfaz gráfica en Matlab resulta de gran utilidad para analizar el tiempo de subida de los diseños efectuados, permitiendo realizar una comparación más detallada e intuitiva.

REFERENCIAS.

1. **A. Oppenheim and R. W. Schaffer:** Discrete-Time Signal Processing, Upper Saddle River. Pearson, 2010.
2. **T. Parks and J. McClellan:** "Chebyshev Approximation for Nonrecursive Digital Filters with Linear Phase," Circuit Theory, IEEE Transactions on, vol. 19, no. 2, pp. 189 – 194, Mar. 1972.
3. **D. W. Tufts and J. T. Francis:** "Designing digital lowpass filters: Comparison of some methods and criteria," IEEE Trans. Audio Electroacoust., vol. AU-18, pp. 487–494, Dec. 1970.
4. **P. P. Vaidyanathan and T. Q. Nguyen:** "Eigenfilters: A new approach to least-squares FIR filter design and applications including Nyquist filters," IEEE Transactions on Circuits and Systems, vol. 34, no. 1, pp. 11–23, 1987.
5. **J. García de Jalón de la Fuente:** Álgebra lineal numérica con Matlab. .
6. **F. Xiong, "Clock Recovery,"** in Digital Modulation Techniques, 2nd ed., Artech House, 2000, pp. 196–198.
7. **Y. Neuvo, D. Cheng-Yu, and S. K. Mitra:** "Interpolated finite impulse response filters," pp. 563–570, Jun. 1984.
8. **T. Chen and P. P. Vaidyanathan:** "Design of IFIR eigenfilters," presented at the, IEEE International Symposium on Circuits and Systems, 1991, 1991, pp. 264–267 vol.1.
9. **B. Nobel and J. W. Daniel:** Applied Linear Algebra. Englewood Cliffs. Prentice-Hall., 1977.